

РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА В ПЛАНЕТНЫХ АТМОСФЕРАХ. I*

Теоретическое решение вопроса о световом режиме в планетных атмосферах, так же как и решение аналогичной проблемы для морских и океанских глубин, представляет значительные трудности. Метод учета рассеяний последовательных порядков, математически эквивалентный разложению в ряд Неймана решения соответствующего интегрального уравнения, приводит на первых же ступенях к невероятно громоздким формулам. Между тем, для того чтобы решение хоть сколько-нибудь правильно представляло приближение к точному решению для случая больших оптических глубин ($\tau \gg 1$), необходимо учитывать рассеяние очень большого числа порядков. Достаточно сказать, что среднее число рассеяний, претерпеваемых световым квантом прежде, чем достигнуть оптической глубины τ , порядка τ^2 . Только при $\tau < 1$, т. е. когда атмосфера обладает лишь небольшой непрозрачностью, метод учета рассеяний последовательных порядков имеет практическое значение.

В противоположность этому методу, метод приближенного решения уравнений переноса (приближения Шварцшильда—Шустера и Эддингтона) соблазняет своей простотой. Но этот метод, с одной стороны, не был до конца обобщен на случай, когда индикатриса рассеяния не обладает сферической симметрией, и, с другой стороны, при наличии поглощения наряду с рассеянием, приводит к большим ошибкам для больших оптических глубин. На малых же оптических глубинах этот метод вообще не может дать хороших результатов,

В настоящей работе рассматривается проблема одновременного рассеяния и поглощения в атмосфере, состоящей из плоско-параллельных слоев. При этом сначала берется для простоты случай сферической индикатрисы рассеяния, а затем производится обобщение на случай любой индикатрисы. Сущность метода заключается в том, что ищется решение соответствующего интегрального уравнения путем

* Уч. зап. ЛГУ, № 82, сер. матем. наук (астрономия), вып. 11, 1941.

последовательных приближений. Однако, в отличие от метода учета рассеяний последовательных порядков, мы будем исходить как от первого приближения от такой функции, которая на больших оптических глубинах достаточно близка к точному решению. Путем итераций получаются следующие приближения, которые представляются в сравнительно простом виде. Полученные результаты могут быть применены к ряду практических случаев.

§ 1. Нахождение исходного приближения

В большинстве рассматриваемых практических задач источники освещения расположены вне атмосферы. Поэтому на большую оптическую глубину прямое излучение от этих источников не попадает. Туда попадает лишь многократно рассеянное излучение этих источников в виде некоторого потока диффузного излучения, идущего от поверхностных слоев вниз. Поскольку мы будем отсчитывать оптическую глубину от границы слоев вглубь, мы можем сказать, что имеет место поток излучения в направлении возрастающих τ . Оптическая

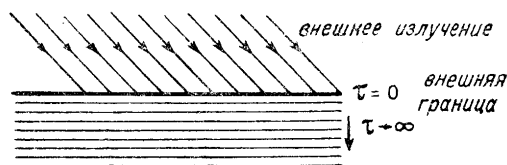


Рис. 1. Односторонняя бесконечность.

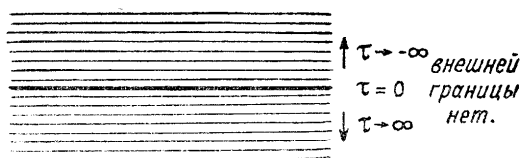


Рис. 1а. Двусторонняя бесконечность.

глубина τ будет при этом меняться от 0 до $+\infty$ (односторонняя бесконечность). Вследствие наличия истинного поглощения поток излучения при углублении будет все более уменьшаться.

Но изучая световой режим на больших оптических глубинах, куда, вдобавок, не проникает прямое излучение снаружи, мы можем считать, что он будет весьма близок к световому режиму в плоскопараллельных слоях, составляющих двустороннюю бесконечность, т. е. в такой совокупности плоскопараллельных слоев, в которой луч, пущенный от некоторой точки по нормали к этим слоям, ослабнет до нуля, независимо от того, пустили ли мы луч в сторону положительной или отрицательной нормали.

Оба случая (односторонней и двусторонней бесконечности) представлены схематически на прилагаемом чертеже (рис. 1 и 1а).

В реальных задачах, встречаемых в теории планетных атмосфер, мы имеем дело, строго говоря, с атмосферой конечной оптической

толщины. Но если эта оптическая толщина очень велика по сравнению с единицей, мы вводим модель односторонней бесконечности. Но, очевидно, что, если мы изучаем световой режим в глубоких слоях этой атмосферы (но все же не очень близких к поверхности планеты), мы можем ожидать получить приближенное решение, вводя модель двусторонней бесконечности с потоком энергии, идущим из области отрицательных z . Для этой модели мы найдем точное решение. Чем более глубокие слои мы берем, тем лучше это решение отражает истинное положение дел. Именно это решение будет потом служить исходным приближением для решения реальных задач. Поэтому начнем с такого решения задачи для двусторонней бесконечности.

§ 2. Интегральное уравнение для двусторонней бесконечности

Обозначим через α коэффициент ослабления в нашей среде. Величина α может быть и обычно является функцией высоты z над поверхностью планеты.

Для оптической глубины τ на высоте z мы будем иметь определение

$$\tau = \int_z^0 \alpha dz,$$

где нульпункт высот выбран произвольно где-то в глубоких слоях атмосферы.

Если обозначим через I интенсивность излучения, то единицей объема будет поглощаться и рассеиваться в единицу времени количество энергии:

$$\alpha \int I d\omega,$$

где интегрирование распространено по всем телесным углам. Из этого количества некоторая доля будет рассеиваться. Обозначим ее через

$$\sigma \int I d\omega,$$

тогда τ будет коэффициентом рассеяния. Остальное же количество

$$(\alpha - \sigma) \int I d\omega = \kappa \int I d\omega$$

будет поглощаться. Величину κ назовем коэффициентом поглощения.

Если обозначим через $\eta(\theta, \varphi)$ количество энергии, испускаемое единицей объема в единицу времени и в единице телесного угла в направлении, определяемом углами θ, φ , то, поскольку все испускаемое излучение есть рассеянное, а истинное излучение отсутствует, то вообще

$$\eta(\theta, \varphi) = \frac{\sigma}{4\pi} \int x(\gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (1)$$

где γ есть угол между направлениями θ, φ и θ', φ' , а $x(\gamma)$ — так называемая индикатриса рассеяния, обладающая тем свойством, что

$$\frac{1}{4\pi} \int x(\gamma) d\omega = 1; \quad \frac{1}{4\pi} \int x(\gamma) d\omega' = 1. \quad (2)$$

Интегрируя (1) по θ и φ , будем, очевидно, иметь

$$\int \eta(\theta, \varphi) d\omega = \sigma \int I(\theta', \varphi') d\omega'. \quad (3)$$

В частном случае, когда имеем сферическую индикатрису рассеяния, т. е. $x(\gamma) = 1$, η не зависит от направления

$$\eta = \frac{\sigma}{4\pi} \int I(\theta, \varphi) d\omega. \quad (4)$$

Разделив на α , находим:

$$\frac{\eta}{\alpha} = \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1}{4\pi} \int I d\omega. \quad (5)$$

Отношение $\frac{\eta}{\alpha}$, как всегда в теории лучевого равновесия, обозначается через B , отношение же $\frac{\sigma}{\alpha}$ обозначим через

$$\lambda = \frac{\sigma}{\alpha}. \quad (6)$$

Тогда

$$B = \frac{\lambda}{4\pi} \int I d\omega. \quad (7)$$

Это условие будем называть уравнением лучевого равновесия. Как известно, из решения уравнения переноса, которое можно написать для нашего случая в виде:

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - B, \quad (8)$$

где θ —угол, образуемый направлением излучения с нормалью, следует при двусторонней бесконечности:

$$\frac{1}{4\pi} \int I d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt, \quad (9)$$

где $Ei(x)$ есть трансцендентная функция, равная $Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$,

вследствие чего уравнение лучевого равновесия (7) можно переписать в виде:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt. \quad (10)$$

Заметим, что уравнение (1), из которого следует (10), предполагает отсутствие „источников“ рассеянного излучения, в частности, в данном случае прямого излучения внешних тел. Физически это означает, что эти источники удалены в бесконечность, например, в сторону отрицательных τ .

Решение уравнения (10) ищем в форме:

$$B(t) = Ce^{-kt}, \quad (11)$$

где k — положительное число.

Подставляя (11) в (10), находим, что последнее уравнение действительно удовлетворится в случае, если k связано с λ равенством:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}}. \quad (12)$$

Очевидно, что каждому λ , заключенному в пределах $[0,1]$, соответствует одно положительное значение k , удовлетворяющее (12). Но если некоторое k удовлетворяет (12), то ему удовлетворяет также $-k$. Поэтому уравнению (10) наряду с решением Ce^{-kt} удовлетворяет и решение $C_1 e^{kt}$. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$B(t) = Ce^{-kt} + C_1 e^{kt}. \quad (13)$$

Можно показать, что постоянная C_1 при наших условиях равна нулю. Для этого рассмотрим поток излучения H . Как известно,

$$H = \int I \cos \theta d\omega. \quad (14)$$

Для того чтобы получить изменение потока с оптической глубиной, помножим уравнение переноса на $d\omega$ и проинтегрируем по всем телесным углам. Тогда получим:

$$\frac{dH}{d\tau} = \int I d\omega - 4\pi B. \quad (15)$$

С другой стороны, в силу условия лучевого равновесия,

$$4\pi B = \lambda \int I d\omega.$$

Поэтому

$$\frac{dH}{d\tau} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) 4\pi B, \quad (16)$$

или, при нашем решении,

$$\frac{dH}{d\tau} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) 4\pi [C_1 e^{-k\tau} + C_2 e^{k\tau}]. \quad (17)$$

По физическому смыслу функции B коэффициент C_1 должен быть положителен или равен нулю, иначе при $\tau \rightarrow \infty$ было бы $B(\tau) < 0$. С другой стороны, из (17) следует, что если $C_1 > 0$, то при больших τ и H должно стать положительным и бесконечно возрастать, так как $\lambda < 1$. Но это означало бы наличие потока, идущего из области положительных τ к отрицательным, т. е., говоря физически, наличие внешних источников на положительной бесконечности, что противоречит нашим допущениям.

Поэтому, при источниках энергии, удаленных в область бесконечно больших отрицательных τ , имеем:

$$B(\tau) = C_1 e^{-k\tau}. \quad (18)$$

Для потока мы получим:

$$H(\tau) = -\frac{4\pi}{k} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-k\tau} + C_2.$$

Однако постоянная C_2 должна равняться нулю, так как при $\tau \rightarrow \infty$ и $H(\tau) \rightarrow 0$. Итак, поток имеет отрицательное значение, т. е. направлен вниз и равен

$$H(\tau) = -\frac{4\pi}{k} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-k\tau}. \quad (19)$$

Абсолютное значение потока уменьшается при увеличении τ вследствие наличия истинного поглощения. Решение (18), являющееся точным для двусторонней бесконечности, мы и примем за исходное приближение при рассмотрении проблемы односторонней бесконечности.

§ 3. Сравнение с результатом приближенного решения по методу Эддингтона

Для сравнения приведем решение той же задачи по методу Эддингтона. Мы имеем из уравнения переноса путем умножения его на $\cos \theta$ и интегрирования по всем направлениям:

$$\frac{d}{d\tau} \int I \cos^2 \theta d\omega = H. \quad (20)$$

В методе Эддингтона среднее значение $\cos^2 \theta$ принимается равным $1/3$, и поэтому, а также в силу условия лучевого равновесия, мы можем написать:

$$\frac{4\pi}{3\lambda} \frac{dB}{d\tau} = H, \quad (21)$$

что вместе с (16) дает

$$\frac{d^2 B}{d\tau^2} = 3(1 - \lambda)B. \quad (22)$$

Решение этого уравнения можно представить также в виде

$$B = C_0 e^{-k\tau} + C_1 e^{k\tau}, \quad (23)$$

где $k = \sqrt{3(1-\lambda)}$, или

$$\lambda = 1 - \frac{k^2}{3}. \quad (24)$$

Эта формула дает совпадающие с (12) значения только для малых k (т. е. λ , близких к единице), когда можно пренебречь k^4 . При λ , сколько-нибудь заметно отличающихся от единицы, разница между (12) и (24) дает большую разницу в B , так как k , являющаяся функцией λ , входит в показатель решения (11). Вычисление показывает, что уже при $\lambda = 0,9$ формула (24) для k приводит к результатам для B , даже на умеренных глубинах (τ порядка 10), в десятки раз отличающимся от правильных, полученных на основании (12).

Таким образом, для $\lambda \leq 0,9$ приближение Эддингтона никак не может быть применено, особенно при исследовании светового режима на больших оптических глубинах.*

* О характере ошибки при применении приближенных дифференциальных уравнений в случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$) см. Болдырев и Александров. Труды Гос. опт. института, II, вып. 99, 65, 1936.

§ 4. Причина неприменимости приближения Эддингтона

В приближении Эддингтона среднее значение $\cos^2\theta$ в (20) принимается равным $1/3$ и этим обусловлено значение $k = \sqrt{3(1-\lambda)}$; если среднее значение $\cos^2\theta$ принять другим, то и показатель k примет другое значение. Но очевидно, что когда $B(\tau)$, т. е. испускательная способность падает экспоненциально при возрастании τ , излучение в каждой точке далеко от изотропности. Излучение, идущее сверху ($\theta = \pi$; $\cos\theta = -1$), доминирует. Поэтому $\overline{\cos^2\theta} > 1/3$. Только при очень малых значениях k излучение в каждой точке будет близким к изотропности, и можно принять $\overline{\cos^2\theta} = 1/3$. В этом заключается причина того, что приближение Эддингтона не может быть применено при k , не очень малых по сравнению с единицей, т. е. при заметном поглощении. Аналогичное обстоятельство имеет место в случае приближения Шварцшильда—Шустера. Заметим, наконец, что в случае планетных атмосфер, так же как и в случае большинства мутных жидкостей, λ заметно отличается от единицы. Если бы λ было очень близко к единице, то альbedo планеты было бы также весьма близко к единице. Наблюдения же показывают, что этого нет*.

§ 5. Точное уравнение для случая односторонней бесконечности

Для того чтобы получить решение нашей задачи, применимое и к слоям, близким к границе атмосферы, т. е. расположенным на небольшой оптической глубине, мы уже должны рассмотреть более трудную для изучения модель односторонней бесконечности, в которой оптическая глубина меняется от 0 до ∞ . Оптическая глубина будет теперь у нас отсчитываться от внешней границы атмосферы вглубь. Слой $\tau = 0$ будет соответствовать самой внешней границе. Очевидно, что в этом случае нужно учитывать излучение, идущее снаружи. Пусть по-прежнему I есть интенсивность диффузного излучения в нашей среде, не включающая в себе интенсивность излучения от внешних объектов. Пусть мы имеем определенный поток энергии, падающий от внешних источников на единицу площади слоя $\tau = 0$. Это прямое излучение при прохождении в глубину будет ослабляться. Если, например, источник излучения находится настолько далеко, что лучи, исходящие от разных точек его поверхности, можно счи-

* Альbedo планеты зависит не только от λ , но и от индикатрисы рассеяния. При сильно вытянутой вперед индикатрисе рассеяния альbedo может быть значительно меньше единицы даже в том случае, когда λ очень близко к единице. *Ред.*

тать параллельными между собой, а вся его видимая поверхность занимает малый телесный угол $\Delta\omega_1$, то количество энергии, впервые рассеиваемое единицей объема в поверхностных слоях, где прямые лучи еще не ослаблены, будет равно $\sigma I_0 \Delta\omega_1$, а на глубине τ это количество будет уже равно $\sigma I_0 \Delta\omega_1 e^{-\tau \sec \theta_0}$, где θ_0 есть угол, образованный направлением лучей внешнего источника с внутренней нормалью к слоям. Удобно обозначать $I_0 \Delta\omega = \pi S$. Тогда количество энергии, рассеиваемое единицей объема в единицу времени, будет равно

$$\sigma \pi S e^{-\tau \sec \theta_0}.$$

Это будет, так сказать, „плотность источников рассеянного излучения“.

Рассмотрим другой пример, когда на границу $\tau = 0$ падает извне *изотропное* излучение интенсивности I_0 .

В этом случае количество энергии прямого излучения, превращаемое впервые в рассеянное на глубине τ в единице объема, будет:

$$\tau I_0 \int e^{-\tau \sec \theta} d\omega = 2\pi \tau I_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau \sec \theta} \sin \theta d\theta = 2\pi \tau I_0 E i_2 \tau,$$

где

$$E i_2 \tau = \int_1^{\infty} e^{-\tau y} \frac{dy}{y^2}.$$

Во всех рассматриваемых случаях мы можем написать количество впервые рассеиваемой единицей объема энергии прямого излучения в виде: $\pi S \sigma g(\tau)$.

Тогда и условие лучевого равновесия можно будет написать вместо (4) в виде:

$$4\pi \eta(\tau) = \sigma \int I d\omega + \pi S \sigma g(\tau), \quad (25)$$

или

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \int I d\omega + \frac{\lambda}{4} S g(\tau). \quad (26)$$

Обозначим, далее,

$$\frac{\lambda}{4} S g(\tau) = f(\tau). \quad (27)$$

С другой стороны, входящий в (26) интеграл равен:

$$\frac{1}{4\pi} \int Id\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt,$$

как это следует из решения уравнения переноса и предельных условий. Поэтому (26) представляется в виде:

$$B(\tau) = f(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt. \quad (28)$$

Это и есть основное неоднородное интегральное уравнение нашей проблемы (уравнение О. Д. Хвольсона).

Как уже указывалось выше, мы будем решать это уравнение последовательными приближениями, взяв за исходное приближение такую функцию, которая хорошо представляет решение на больших глубинах. Такой функцией является, как мы видели,

$$B_0(\tau) = Ce^{-k\tau}. \quad (29)$$

Значение постоянной C при этом не будет произвольным, а должно быть выбрано так, чтобы (28) удовлетворялось по возможности более точно. Мы потребуем такого значения C , чтобы исходное приближение $B_0(\tau)$ удовлетворяло уравнению (28) „в среднем“, т. е. чтобы интегралы, распространенные на всю область от обеих частей уравнения (28), были бы равны. Иными словами, чтобы

$$\int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau + \lambda \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} Ei_2\tau\right) B_0(\tau) dt, \quad (30)$$

так как

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| d\tau = 1 - \frac{1}{2} Ei_2t.$$

Поэтому

$$C = \frac{\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} \left[(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{2} Ei_2\tau \right] e^{-k\tau} d\tau}$$

или

$$C = \frac{k \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau}{1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2k} \ln(1+k)}.$$

Путем преобразования получим, пользуясь (12),

$$C = - \frac{\ln(1+k) - \ln(1-k)}{k + \ln(1-k)} k \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau.$$

Дальнейшее вычисление и переход к следующему приближению нужно производить для каждого частного случая в отдельности. Суть же метода будет заключаться в том, что, подставляя в правую часть (28) вместо $B(\tau)$ его выражение в первом приближении, получим второе приближение для $B(\tau)$ и так далее.

§ 6. Освещение параллельным пучком

В этом случае

$$f(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \theta_0}. \quad (31)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C &= - \frac{\ln(1+k) - \ln(1-k)}{k + \ln(1-k)} \frac{\lambda}{4} k S \cos \theta_0 = \\ &= - \frac{k^2}{k + \ln(1-k)} \frac{1}{2} S \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь мы можем вычислить в первом приближении распределение яркости по диску планеты. Для интенсивности излучения, выходящего под углом β к нормали, мы будем иметь в первом приближении

$$I_0(0, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\tau \sec \beta} B_0(\tau) \sec \beta d\tau.$$

Подставляя сюда вместо $B_0(\tau)$ выражение (11), получаем:

$$I_0(0, \beta) = \frac{C \sec \beta}{k + \sec \beta}. \quad (33)$$

или

$$I_0(0, \beta) = -\frac{1}{2} k^2 S \frac{1}{k + \ln(1-k)} \frac{\cos \theta_0}{1 + k \cos \beta}. \quad (34)$$

В противостоянии планеты $\theta_0 = \beta$. Поэтому

$$I_0(0, \beta) = -\frac{1}{2} S \frac{k^2}{k + \ln(1-k)} \frac{\cos \beta}{1 + k \cos \beta}. \quad (35)$$

Это и есть теоретическое распределение энергии по диску в исходном приближении.

Для того чтобы получить решение во втором приближении, подставим в правую часть (28) вместо $B(\tau)$ выражение (29) для $B_0(\tau)$. Иными словами, вычислим второе приближение:

$$B_1(\tau) = f(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| B_0(t) dt. \quad (36)$$

Получаем:

$$B_1(\tau) = f(\tau) + C e^{-k\tau} - \frac{\lambda C}{2k} [e^{-k\tau} Ei(1-k)\tau - Ei\tau], \quad (37)$$

где C по-прежнему определяется через (32).

Это дает возможность определить распределение яркости во втором приближении путем вычисления интеграла:

$$I_1(0, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\tau \sec \beta} B_1(\tau) \sec \beta d\tau.$$

Получаем:

$$I_1(0, \beta) = \frac{C}{1 + k \cos \beta} + \frac{\lambda}{4} S \frac{\sec \beta}{\sec \theta_0 + \sec \beta} - \frac{\lambda C}{2k} \frac{\sec \beta}{k + \sec \beta} \ln \frac{1 + \sec \beta}{1 - k} + \frac{\lambda C}{2k} \ln(1 + \sec \beta). \quad (38)$$

Путем небольшого преобразования (38) приводится к виду:

$$I_1(0, \beta) = \frac{C \sec \beta}{k + \sec \beta} + \frac{\lambda}{4} S \frac{\sec \beta}{\sec \theta_0 + \sec \beta} + \frac{\lambda C}{2k} \ln(1 - k) + \frac{\lambda C}{2} \frac{1}{k + \sec \beta} \ln \frac{1 + \sec \beta}{1 - k}. \quad (39)$$

Подставим сюда вместо C его значение и примем во внимание, что в противостоянии планеты $\theta_0 = \beta$. Мы получаем распределение энергии по диску планеты в противостоянии:

$$I_1(0) = \frac{1}{2} S \left[\frac{A}{k + \sec \beta} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda A \ln(1-k)}{2k} \cos \beta + \frac{\lambda A \cos \beta}{2(k + \sec \beta)} \ln \frac{1 + \sec \beta}{1 - k} \right], \quad (40)$$

где

$$A = - \frac{k^2}{k + \ln(1-k)}. \quad (41)$$

Выражение (40) дает распределение энергии по диску планеты во втором приближении. Надо думать, что оно довольно хорошо представляет точное решение задачи, ибо выражение $B_1(\tau)$, на котором оно основано, является хорошим приближением к точному решению $B(\tau)$ не только для $\tau > 1$, как $B_0(\tau)$, но уже и для малых значений τ .

Интересно сравнить результат, получаемый из (40) в предельном случае, когда $\lambda = 1$, т. е. $k = 0$, представляющем собой случай чистого рассеяния, с результатом, получаемым путем приближенного решения уравнения переноса. Как уже указывалось, при λ , равном или близком к единице, метод приближенного решения уравнения переноса (по Эддингтону или Шварцшильду) применим.

Из (40) путем раскрытия неопределенностей получаем, когда $k = 0$ и $\lambda = 1$,

$$I(0, \beta) = \frac{1}{2} S \left[\frac{1}{4} + \cos \beta + \cos^2 \beta \ln(1 + \sec \beta) \right]. \quad (42)$$

Что касается распределения яркости, получаемого из приближенного решения уравнений переноса, то оно формально совершенно совпадает с решением, получаемым в вопросе об отражении света в затмевающихся переменных. Как известно, по Милну, это решение имеет вид (см., например, Амбарцумян, Теоретическая астрофизика, стр. 33):

$$I(0, \beta) = \frac{1}{2} S \left(\cos \beta + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (43)$$

Иными словами, вся разница заключается в том, что в (42) входит при $\cos^2 \beta$ вместо единицы множитель $\ln(1 + \sec \beta)$, который медленно меняется и для малых β , где член $\cos^2 \beta$ играет вообще роль, порядка единицы.

Отношение центра к краю получается по (42) порядка 8, вместо 9 по (43). Такое совпадение является хорошим контролем качества полученного приближения. Что касается сравнения формулы (40) с наблюдениями, мы этим здесь заниматься не будем. Приводим лишь таблицу теоретических значений коэффициентов яркости в противостоянии планеты при трех значениях λ ($\lambda = 1,00, 0,864, 0,728$) (см. табл. 1).

Таблица 1
Теоретические коэффициенты яркости в противостоянии планеты при сферической индикатриссе рассеяния и при различных значениях λ

k, λ	$k=0.0$ $\lambda=1.0$	$k=0.6$ $\lambda=0.864$	$k=0.8$ $\lambda=0.728$
β			
0°	0.972	.304	0.198
10	.970	.303	.200
20	.975	.313	.205
30	.975	.333	.219
40	.983	.358	.236
50	.999	.395	.265
60	1.024	.456	.314
70	.082	.591	.415
80	.382	.933	.657
90	∞	∞	∞

§ 7. Освещение диффузным светом

В этом случае

$$f(\tau) = \frac{\lambda}{2} I_0 E i_2 \tau. \quad (44)$$

Поэтому

$$C = - \frac{k^2}{k + \ln(1-k)}. \quad (45)$$

Когда мы имеем мутную среду, освещенную снаружи диффузным светом, например море, освещенное облачным небом, прежде всего наибольший интерес представляет вопрос о том, какой процент поступающей в среду радиации выходит из среды назад. Для этого нужно вычислить поток выходящего из среды излучения. На границе, при $\tau=0$, поток равен:

$$H(0) = \int I \cos \theta d\omega = \int \cos \theta d\omega \int_0^{\infty} e^{-\tau \sec \theta} B(\tau) \sec \theta d\tau.$$

Переставляя порядок интегрирования, получаем:

$$H(0) = 2\pi \int_0^{\infty} E i_2 \tau B(\tau) d\tau. \quad (46)$$

Подставляя сюда вместо $B(\tau)$ выражение $Ce^{-k\tau}$, получаем:

$$H(0) = \frac{2\pi C}{k} \left[1 - \frac{1}{k} \ln(1+k) \right],$$

или, в силу (45),

$$H(0) = \pi I_0 \frac{\ln(1+k) - k}{\ln(1-k) + k}. \quad (47)$$

Разделив на входящий поток πI_0 , получим для альбеда жидкости выражение:

$$a = \frac{\ln(1+k) - k}{\ln(1-k) + k}. \quad (48)$$

В частном случае, когда $\lambda=1$, т. е. $k=0$, мы имеем $a=1$.

Иными словами, среда, в которой отсутствует поглощение, имеет альбеда, равное единице, что ясно из физических соображений, без вычислений.

Зависимость a от λ , вычисленная на основании (48) и (12), дана в табл. 2.

Таблица 2

λ	k	a
1,00	0,00	1,00
0,99	0,20	0,78
0,94	0,40	0,57
0,86	0,60	0,41
0,73	0,80	0,26
0,61	0,90	0,18
0,00	1,00	0,00

Надо, однако, заметить, что второе приближение, значительно улучшающее значение B для малых τ , должно заметно улучшить и получающиеся численные значения альбеда, поскольку альбеда сильно зависит от освещенности слоев с малыми τ . Отметим далее, что мы здесь не учитывали отражающего свойства поверхности жидкости, которое должно сказаться двояко: 1) путем отражения части потока, идущего извне, и 2) путем внутреннего отражения лучей, идущих изнутри, что влияет на весь световой режим. Однако мы здесь этими

вопросами не будем заниматься, так как наша цель дать лишь общую постановку задачи.

Рассмотрев случай сферической индикатрисы рассеяния, перейдем к случаю асферической индикатрисы, когда рассеяние света производится неравномерно во все стороны.

§ 8. Случай асферической индикатрисы рассеяния

Исходным уравнением у нас опять будет условие лучевого равновесия (1)

$$\eta(\theta, \varphi) = \frac{\sigma}{4\pi} \int x(\cos \gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (1)$$

где γ есть угол между направлениями θ, φ и θ', φ' , определяемый равенством:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (49)$$

Что касается равенств (2), нормирующих индикатрису рассеяния, то их можно переписать также в виде:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi x(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = 1. \quad (50)$$

В дальнейшем мы будем иметь в виду такие поля излучения, в которых интенсивность зависит только от угла θ (зенитное расстояние) и не зависит от азимута φ . Тогда и η будет зависеть только от θ . Необходимым условием для этого в случае наличия внешнего освещения является то, чтобы интенсивность наружного излучения зависела только от θ .

Рассмотрим элемент объема dV . Из излучения, заключенного в телесном угле $d\omega'$, он рассеивает во все стороны в единицу времени количество

$$\sigma I(\theta') dV d\omega'.$$

Для того чтобы получить ту долю этой энергии, которая рассеяна внутри телесного угла $d\omega$, нужно помножить это количество на $x(\cos \gamma) \frac{d\omega}{4\pi}$, где γ угол между направлениями θ, φ и θ', φ' . Иными словами, мы будем иметь:

$$\sigma dV I(\theta') x(\cos \gamma) \frac{d\omega}{4\pi} d\omega',$$

или

$$\sigma dVI(\theta') x(\cos \gamma) \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

Зададимся целью выяснить, какое количество энергии, имеющей направления, заключенные внутри $d\omega'$, рассеивается в направлениях, заключенных между альмукантаратами θ и $\theta + d\theta$.

Очевидно, это количество равно:

$$\sin \theta' d\theta' d\varphi' \sigma dVI(\theta') \frac{\sin \theta d\theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \gamma) d\varphi,$$

или

$$\sin \theta' d\theta' d\varphi' \sigma dVI(\theta') \frac{\sin \theta d\theta}{2} p(\theta, \theta'), \quad (51)$$

где

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \gamma) d\varphi. \quad (52)$$

Очевидно, что выражение $p(\theta, \theta')$ не зависит не только от φ , но и от φ' .

Физически можно определить $p(\theta, \theta')$ как функцию, которая показывает, как распределяется после рассеяния по зенитным расстояниям θ излучение, которое до рассеяния имело зенитное расстояние θ' .

Интегрируя (52) по θ , получаем, на основании (2), условие нормировки:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta d\theta = 1. \quad (53)$$

Кроме того, заметим, что функция $p(\theta, \theta')$ симметрична по отношению к θ и θ' , т. е.

$$p(\theta, \theta') = p(\theta', \theta). \quad (54)$$

Введенная таким образом функция $p(\theta, \theta')$ обладает рядом весьма важных свойств, рассмотренных в следующем параграфе. Ее введение весьма облегчает решение всей проблемы рассеяния при асферической индикатрисе.

§ 9. Свойства функции $p(\theta, \theta')$

Рассмотрим некоторые свойства функции $p(\theta, \theta')$, определенной, согласно (52), через:

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi.$$

Свойство 1. Рассмотрим, чему равно $p(0, \theta')$.

$$p(0, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \theta') d\varphi = x(\cos \theta'), \quad (55)$$

т. е. $p(0, \theta')$ есть индикатриса рассеяния.

Свойство 2. Разложим индикатрису рассеяния $x(\cos \gamma)$ в ряд по полиномам Лежандра от аргумента $\cos \gamma$.

$$x(\cos \gamma) = \sum_i x_i P_i(\cos \gamma). \quad (56)$$

При этом мы будем брать полиномы Лежандра в такой нормировке, когда $P_i(1) = 1$. Коэффициенты разложения x_i могут быть вычислены, если известна сама индикатриса рассеяния.

Но из теории шаровых функций известно, что

$$P_i(\cos \gamma) = P_i(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) \quad (57)$$

должно представлять собой шаровую функцию Лапласа i -го порядка $Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$. При этом аргументами мы можем считать как пару переменных θ и φ , так и пару θ' и φ' . В первом случае коэффициенты шаровой функции будут зависеть от θ' и φ' , как от параметров, во втором — от θ и φ . Имея это в виду, вычислим интеграл.

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Он, очевидно, равен:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi P_k(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} x(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо $x(\cos \gamma)$ его разложение (56), находим:

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = \sum_i \frac{x_i}{2\pi} \int_0^\pi P_k(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi') d\varphi =$$

$$= \sum_i x_i \frac{1}{2\pi} \int Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi') P_k(\theta) d\omega. \quad (58)$$

Но из свойств шаровых функций нетрудно видеть, что шаровая функция Лапласа i -го порядка, коэффициенты которой зависят от некоторых независимых параметров θ и φ , будучи помножена на любую функцию этих параметров и проинтегрирована по этим параметрам в некоторых пределах, должна снова дать некоторую шаровую функцию i -го порядка от своих аргументов θ' и φ' . Это вытекает из того, что любая линейная комбинация шаровых функций i -го порядка есть также шаровая функция i -го порядка. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi') P_k(\theta) d\omega = \bar{Y}_i(\theta', \varphi'),$$

где $\bar{Y}_i(\theta', \varphi')$ какая-то шаровая функция i -го порядка. Заметим, далее, что в правой части (58) все члены, для которых $i \neq k$, обратятся в нуль, так как $P_k(\theta)$ есть частный случай шаровой функции Лапласа k -го порядка. Поэтому

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = x_k \bar{Y}_k(\theta', \varphi'). \quad (59)$$

Поскольку левая часть не зависит от φ' , от нее не должна зависеть и правая часть. Это означает, однако, что правая часть есть шаровая функция Лапласа k -го порядка, зависящая только от θ' , т. е. полином Лежандра от θ' . Мы можем поэтому положить:

$$\bar{Y}_k(\theta', \varphi') = c_k P_k(\theta').$$

Итак,

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = x_k c_k P_k(\theta'). \quad (60)$$

Имея в виду, что $P(\theta, 0) = x(\cos \theta) = \sum x_i P_i(\theta)$, мы находим:

$$x_k \int P_k^2(\theta) \sin \theta d\theta = x_k c_k P_k(0),$$

т. е.

$$c_k = \int_0^\pi P_k^2(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (61)$$

Таким образом, c_k представляет норму полинома P_k .

Если рассматривать функцию $p(\theta, \theta')$ как ядро интегрального уравнения

$$\psi(\theta) = \lambda \int_0^\pi p(\theta, \theta') \sin \theta \psi(\theta) d\theta,$$

то мы можем сказать, на основании (60), числа $\lambda = \frac{1}{c_k x_k}$ являются собственными значениями этого ядра. Им соответствуют собственные функции

$$\psi(\theta) = P_k(\theta).$$

Само ядро $p(\theta, \theta')$ мы можем представить в форме:

$$p(\theta, \theta') = \sum_i x_i P_i(\theta) P_i(\theta'). \quad (62)$$

Эти свойства функции $p(\theta, \theta')$ имеют весьма важное значение. Формула (53) является лишь частным случаем установленного свойства при $k=0$.

Будем также иметь в виду, что если в разложении (56) индикатрисы рассеяния можно приближенно ограничиться конечным числом членов, то и в разложении (62) функции $p(\theta, \theta')$ можем ограничиться также конечным числом членов, т. е. $p(\theta, \theta')$ будет представлять собой вырожденное ядро.

§ 10. Интегральное уравнение лучевого равновесия при асферической индикатрисе рассеяния

При сделанных выше предположениях о независимости I и η от φ уравнение (1), на основании (52), переписывается в виде:

$$\eta(\theta) = \frac{\sigma}{2} \int_0^\pi p(\theta, \theta') I(\theta') \sin \theta' d\theta'.$$

Обозначая $\frac{\eta}{\alpha}$ через $B(\tau, \theta)$, получаем:

$$B(\tau, \theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\pi p(\theta, \theta') I(\theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (63)$$

При двусторонней бесконечности имеем следующие выражения для $I(\theta')$:

$$\left. \begin{aligned} I(\theta') &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') \sec \theta' dt & \left(\theta' < \frac{\pi}{2} \right), \\ I(\theta') &= - \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') \sec \theta' dt & \left(\theta' > \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Поэтому интегральное уравнение лучевого равновесия получается в виде:

$$\begin{aligned} B(\tau, \theta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \theta') \sec \theta' \sin \theta' d\theta' \int_{\tau}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt - \\ &- \frac{\lambda}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \sec \theta' \sin \theta' d\theta' \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Это уравнение и подлежит решению*. Мы попытаемся найти решение для данного λ в форме:

$$B(\tau, \theta) = b(\theta) e^{-k\tau}. \quad (66)$$

Подстановка (66) в (65) приводит к тому результату, что (65) удовлетворяется в случае, если $b(\theta)$ является решением однородного интегрального уравнения:

$$b(\theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \frac{\operatorname{tg} \theta'}{k + \sec \theta'} b(\theta') d\theta',$$

или

$$b(\theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \frac{\sin \theta'}{1 + k \cos \theta'} b(\theta') d\theta'. \quad (67)$$

* Из прежних попыток написать интегральное уравнение лучевого равновесия при асферической индикатрисе упомяну работу Гуревича (Труды Гос. опт. института, XI, вып. 99, 72, 1936).

Вместо переменной θ' удобно ввести переменную $y' = \cos \theta'$ и вместо θ переменную $y = \cos \theta$. Тогда

$$b(y) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} p(y, y') \frac{b(y')}{1 + ky'} dy'. \quad (68)$$

Задача заключается в том, чтобы определить при данном λ те значения k , при которых уравнение (68) имеет отличные от нуля решения, и найти эти решения.

В частном случае, когда имеем сферическую индикатрису рассеяния, уравнение (68) имеет решение $b(\theta) = \text{const}$ при значениях k , удовлетворяющих равенству:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}},$$

т. е. мы получаем прежний результат. Другие частные случаи мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 11. Некоторые частные случаи индикатрисы рассеяния

Рассмотрим простейший случай асферической и несимметричной индикатрисы рассеяния, когда она представляется в виде:

$$x(\cos \theta) = 1 + x_1 \cos \theta. \quad (69)$$

Тогда

$$p(\theta, \theta') = 1 + x_1 \cos \theta \cos \theta' = 1 + x_1 y y'. \quad (70)$$

Уравнение (68) тогда принимает вид:

$$b(y) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 + x_1 y y'}{1 + ky'} b(y') dy'. \quad (71)$$

Ищем решение (71) в виде:

$$b(y) = b_0 + b_1 y. \quad (72)$$

Подставляя в (71), получаем как обычно для b_0 и b_1 систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \lambda \left[\frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} b_0 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) b_1 \right] \\ b_1 &= \lambda x_1 \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) b_0 - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k^3} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) b_1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Введем сокращенное обозначение

$$\mu = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \ln \frac{1+k}{1-k}. \quad (74)$$

Тогда

$$b_0 = \lambda [(1 - k\mu) b_0 + \mu b_1],$$

$$b_1 = \lambda x_1 \left[\mu b_0 - \frac{\mu}{k} b_1 \right],$$

или

$$(\lambda - \lambda k\mu - 1) b_0 + \lambda \mu b_1 = 0,$$

$$\lambda x_1 \mu b_0 - \left(\frac{\mu x_1}{k} \lambda + 1 \right) b_1 = 0.$$

Для того чтобы эта система имела решение, нужно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \lambda(1 - k\mu) - 1, & \mu\lambda \\ \lambda x_1 \mu, & -\frac{\mu x_1}{k} \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого уравнения можно найти значения λ при данном k . Затабулировав эти значения, можно, наоборот, находить значения k при данном λ .

Например, оказывается, что значению $k=0,8$ при $x_1=1$ соответствуют два значения λ : $\lambda=2,7$ и $\lambda=0,63$. Первое из этих значений, как не имеющее физического смысла, отпадает. Итак, при $k=0,8$ имеем $\lambda=0,63$. По табл. 2 замечаем, что при сферической индикатрисе рассеяния тому же самому значению λ соответствовало $k > 0,8$, т. е. более быстрое убывание плотности излучения при возрастании τ . Таким образом, при вытянутой индикатрисе рассеяния $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$ излучение проникает глубже, чем при сферической индикатрисе, что вполне понятно физически. Соответствующее решение для $B(\tau, \theta)$ будет иметь вид:

$$B(\tau, \theta) = C(1 - 0,4 \cos \theta) e^{-0,8\tau}.$$

Значение постоянной C в каждой задаче нужно по-прежнему подбирать таким, чтобы уравнение для односторонней бесконечности по возможности лучше удовлетворялось.

В случае Релеевской индикатрисы рассеяния мы будем иметь представление индикатрисы как суммы полиномов Лежандра нулевого и второго порядка. Соответственно будет выражаться и функция $p(\theta, \theta')$. Поэтому наш метод позволяет произвести анализ и этого случая.

§ 12. Случай чистого рассеяния

В случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$), при любой индикатрисе, мы имеем решение: $k = 0$; $b(\theta) = \text{const}$. Имея точное решение задачи с двусторонней бесконечностью для этого случая, мы можем перейти к решению задачи с односторонней бесконечностью, соответствующей реальной действительности. Мы имеем для этого случая уравнение:

$$B(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \theta') \operatorname{tg} \theta' d\theta' \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \operatorname{tg} \theta' d\theta' \int_0^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt. \quad (75)$$

Подставляя в правую часть вместо $B(t, \theta')$ решение двусторонней задачи $B(t, \theta') = \text{const} = C$, получаем в следующем приближении:

$$B_1(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + C - \frac{C}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta' e^{\tau \sec \theta'} d\theta'. \quad (76)$$

Как видим, $B_1(\tau, \theta)$ отличается от исходного приближения на поправку

$$f(\tau, \theta) - \frac{C}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta' e^{\tau \sec \theta'} d\theta'. \quad (77)$$

Выберем постоянную C так, чтобы эта поправка в среднем имела значение, равное нулю, т. е. чтобы интеграл от этой поправки, умноженной на $\sin \theta$, по всем θ и τ был бы равен нулю.

Получаем:

$$C = 2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} f(\tau, \theta) d\tau,$$

так как

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta d\theta = 1.$$

Находим:

$$B_1(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + \int_0^\pi d\theta'' \sin \theta'' \int_0^\infty f(\tau, \theta'') \left[2 - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi p(\theta'', \theta') \sin \theta' e^{\tau \sec \theta'} d\theta' \right] d\tau. \quad (78)$$

Из формулы (77) имеем, что при $\tau \rightarrow \infty$, $B \rightarrow C$. Заметим, что метод учета рассеяний последовательных порядков при колоссальной вычислительной работе все же не может привести к этому весьма простому и физически понятному результату (см., напр., Шулейкин, Физика моря, стр. 392—398, 1933).

В случае, например, когда индикатриса рассеяния представляется в виде (69), мы можем представить (78) в виде:

$$B_1(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + [2 - Ei_2\tau - x_1 \cos \theta Ei_3\tau] \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty f(\tau, \theta) d\tau, \quad (79)$$

где

$$Ei_3\tau = \int_1^\infty e^{-\tau y} \frac{dy}{y^3}.$$

Формула (79) и представляет решение для случая чистого рассеяния во втором приближении.

Заключение

Из приведенных выше примеров видно, что различные задачи теории рассеяния света в планетных атмосферах с успехом могут быть решены при помощи метода интегральных уравнений, который при надлежащем применении дает лучшие результаты, чем метод приближенного решения уравнений переноса. Во второй части этой работы мы дадим результаты применения изложенного здесь метода к некоторым конкретным индикатрисам рассеяния и соответствующие численные таблицы и формулы.

Примечание. Обещанная автором вторая часть этой работы в печати не появилась. Изложенный выше метод для случая двусторонней бесконечности был применен автором в работе „Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде“ (см. стр. 222). Для случая односторонней бесконечности предложенный выше метод автором не применялся. Объясняется это по-видимому тем, что в дальнейшем В. А. Амбарцумян разработал гораздо более сильный метод, заключающийся в сведении интегральных уравнений к функциональным.